SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1998-99

Annalisa Baldi

UN RISULTATO DI NON ESISTENZA PER OPERATORI SUBELLITTICI NON LINEARI

15 aprile 1999

Tecnoprint - Bologna 2000

Sommario: Si studiano questioni di non esistenza di soluzioni di un problema al contorno in un aperto limitato Ω di $\mathbb{R}^n$ per un operatore ipoellittico del secondo ordine. E' data una nozione molto debole di soluzione; nella definizione si tiene conto della presenza di punti caratteristici sulla frontiera di Ω.

Abstract: We consider a non linear subelliptic problem in a bounded open set Ω contained in $\mathbb{R}^n$. We give a very weak notion of solution; we consider the case of open set with characteristic point on the boundary.

1 Introduzione

In questa nota si considera un problema subellittico non lineare in un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$. Esso vuole essere la generalizzazione, al caso ellittico degenere, di un recente risulato, dovuto a Brezis e Cabré in [BC], di un teorema di non esistenza per l' operatore di Laplace. Sia $X = \{X_1, \dots, X_m\}$, un sistema di campi vettoriali C^∞ in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, che soddisfi alla condizione di Hörmander, cioè tale che il rango dell'algebra di Lie generata da $X_1, \dots, X_m$ sia uguale a n in ogni punto. In questo lavoro proveremo che se Ω è un aperto limitato, regolare, il problema al contorno

$$\begin{cases} \mathcal{L}u := \sum_{j=1}^{m} X_j^* X_j u = a(x)g(u) + f(x) \text{ in } \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 \qquad\qquad \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

non ha soluzioni quando

- $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$, non decrescente su $[0, \infty)$, $g(s) > 0$ se $s > 0$, tale che
$$\int^{\infty} \frac{ds}{g(s)} < \infty;$$

- la a è funzione non "troppo singolare", ovvero, se $a \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $a \geq 0$ e indichiamo con d la distanza di Carnot Carathéodory associata ai campi $X_1, \dots, X_m$ (si veda la Definizione 2.2 più avanti), allora deve valere la seguente condizione:

$$\int_{B(\overline{x},\eta)} a(y) \frac{d^2(\overline{x}, y)}{|B(\overline{x}, d(\overline{x}, y))|} dy = \infty \tag{1.2}$$

per tutti gli $\eta > 0$ piccoli (in particolare tali che $B(\overline{x}, \eta) \subset \Omega$). Con $B(x, \eta)$ si denoterà la palla metrica, mentre $|\ \ |$ denota la misura di Lebesgue;

- $a(x)g(u) \in L^1(\Omega)$;
- $f \in L^1(\Omega)$, $f \not\equiv 0$.

Brezis e Cabré hanno studiato fino a che "punto" sia possibile applicare il Teorema della Funzione Inversa per un problema non lineare del tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u^2 + f(x) \text{ in } \Omega \\ \quad u = 0 \qquad\qquad\quad \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove Ω è un dominio regolare in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Se la funzione $f \in L^p(\Omega)$ è piccola, e $a \in L^p(\Omega)$, per quali p esiste un' unica soluzione (piccola) $u \in W^{2,p}(\Omega)$? Nel caso ellittico, se $p > n/2$, l'esistenza di una soluzione $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ è una facile conseguenza del Teorema della Funzione Inversa applicato a $F(u) = -\Delta u - a(x)u^2$ che mappa $W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ su $L^p(\Omega)$, dal momento che il suo differenziale, calcolato nel punto 0, $DF(0) = -\Delta$, è bigettivo . Se $p \leq n/2$, in [BC] gli autori provano un risultato di non esistenza quando sia soddisfatta la seguente condizione:

$$\int_{B_\eta(\overline{x})} \frac{a(x)}{|x - \overline{x}|^{n-2}} dx = \infty \quad \text{per ogni } \eta > 0 \text{ piccolo.} \tag{1.3}$$

Simili risulati di non esistenza possono essere dimostrati anche se si considera un operatore del tipo somma di quadrati, anzichè l' operatore di Laplace. Invece della condizione (1.3) supporremo valida la nostra (1.2). Il fenomeno è legato a stime precise della soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$, provate in [NSW] e [SC],

in analogia al nucleo che compare in (1.3). Per quanto riguarda i risultati "al positivo", circa l'esistenza di soluzioni per l'equazione $\mathcal{L}u = a(x)g(u) + f(x)$, via il Teorema della Funzione Inversa, il problema non è affatto elementare. Le argomentazioni usate per l'operatore di Laplace si basano sull'immersione di $W^{2,p}(\Omega)$ in $L^\infty(\Omega)$ nel caso $p > n/2$. Nel caso di una famiglia di campi vettoriali, prima di tutto si deve sostituire la dimensione n con la dimensione omogenea dello spazio, che indicheremo con Q, che è strettamente legata alla geometria associata all'operatore. Inoltre, per ottenere il corrispondente risultato di immersione pare che occorrano ulteriori ipotesi sul dominio Ω. Ad esempio, nel caso che Ω sia un dominio di Boman (per la definizione e varie proprietà di tali domini si vedano ad esempio [FGW], [GN] e [L]), qualche risultato è stato ottenuto da G. Lu. Un'altro approccio potrebbe essere di passare attraverso un teorema di estensione per Spazi di Sobolev intrinsechi, di ordine piu' alto. Ci sono risultati di estensione, solo nel caso di gruppi di Lie stratificati, provati indipendentemente da G. Lu e da D.M. Nhieu.

Questa nota si organizza come segue. I teoremi chiave di questo lavoro sono il Teorema 3.2 e il Corollario 3.7, essi sono enunciati e dimostrati nella terza sezione . Nella seconda sezione, molto brevemente, si danno alcune definizioni riguardanti la teoria degli spazi metrici e degli operatori ipoellittici. In particolare daremo una definizione di punto caratteristico. Un punto caratteristico è un punto appartenente al bordo dell' aperto, dove ogni campo vettoriale $X_1, \cdots, X_m$ è tangente al bordo. La presenza di punti caratteristici anche nel caso di aperti molto regolari si presenta spesso quando si lavora con operatori ipoellittici, basti pensare al caso del gruppo di Heisenberg. Questo aspetto, che è invece assente quando si lavori con l'operatore di Laplace, differenzia il nostro lavoro da quello di [BC]. In particolare daremo una nozione di soluzione diversa da quella usata in [BC] (si veda [Ba] per una giustificazione della scelta delle funzioni test che impiegheremo in tale definizione). C' è infine una quarta sezione, nella quale studiamo il comportamento di (1.2) in due casi particolari, il secondo dei quali quando l' operatore subellittico in questione è il laplaciano di Kohn.

2 Definizioni notazioni e alcuni risultati preliminari

Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ un sistema di campi vettoriali C^∞ soddisfacenti la condizione di Hörmander in un intorno Ω_0 di Ω (cioè tale che rank Lie$[X_1, \dots, X_m] = n$) (si veda [H]). Ogni campo vettoriale $X_j = (c_{j1}, \dots, c_{jn})$ $(j = 1, \dots, m)$ è identificato con l' operatore differenziale del primo ordine, che indichiamo ancora con X_j,

$$X_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad j = 1, \dots, m,$$

dove i coefficienti c_{ji} sono funzioni C^∞ e a valori reali. Denotiamo con $X_j^* := -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(c_{ji})$ l' aggiunto formale di X_j. Consideriamo quindi l'operatore ellittico degenere del secondo ordine

$$\mathcal{L} := \sum_{j=1}^{m} X_j^* X_j.$$

Grazie ad un teorema di Hörmander ([H]),l' operatore $\mathcal{L}$ è ipoellittico e perciò esiste una soluzione fondamentale $\Gamma(x, y)$ che è C^∞ fuori dalla diagonale. Ricordiamo alcune definizioni legate alla metrica d che è naturalmente associata con il sistema X (si veda ad esempio [FP] per ulteriori nozioni). Denotiamo con $|\ |$ e $< >$, rispettivamente, la norma euclidea e il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.1. *Un vettore $v \in \mathbb{R}^n$ si dice sub-unitario rispetto a X, in ogni punto x, se per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ vale:*

$$\langle v, \xi \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^{m} \langle X_j(x), \xi \rangle^2.$$

Definizione 2.2. *Una curva C^1 a tratti $\gamma : [0, T] \to \Omega_0$ si dice sub-unitaria rispetto a X se per ogni t per cui $\dot{\gamma}(t)$ esiste, $\dot{\gamma}(t)$ è subunitaria rispetto a X in $x = \gamma(t)$.*

Se $x, y \in \Omega_0$ definiamo

$$d(x, y) = \inf \{T > 0 : \text{ esiste una curva subunitaria } \gamma,\ \gamma : [0, T] \to \Omega_0, \\ \gamma(0) = x,\ \gamma(T) = y\}.$$

Indichiamo con $B_R(\overline{x}) = B_R(\overline{x}, R) := \{y \in \Omega : d(\overline{x}, y) < R\}$, la palla metrica di raggio R centrata nel punto $\overline{x}$ e con $|B(\overline{x}, R)|$ la sua misura di Lebesgue. Ricordiamo la seguente proposizione (si vedano [NSW] e [SC]).

Proposizione 2.3. *Sia $n \geq 3$ e sia Γ la soluzione fondamentale dell' operatore $\mathcal{L}$. Se K è un insieme compatto, esiste una costante $C = C(K) > 0$ tale che, per ogni $x, y \in K$, si ha:*

$$\frac{1}{C}\frac{d^2(x,y)}{|B(x,d(x,y))|} \leq \Gamma(x,y) \leq c\frac{d^2(x,y)}{|B(x,d(x,y))|}.$$

Osservazione 2.4. *In [NSW] è provato che la metrica d è localmente "doubling" rispetto alla misura di Lebesgue, cioè esiste una costante C, tale che $|B(x,2r)| \leq C|B(x,r)|$ per ogni x appartenente a K e per ogni $r \leq r_0$. In particolare questo implica che $c_1|B(x,d(x,y))| \leq |B(y,d(x,y))| \leq c_2|B(x,d(x,y))|$ per $x, y \in K$.*

Osservazione 2.5. *Per la proprietà di doubling esiste $Q \geq n$ tale che, per ogni insieme compatto K, esiste una costante $c_K > 0$ per cui vale: $|B(x,rt)| \geq ct^Q|B(x,r)|$ per gli x del compatto K, $t \in (0,1)$ e per $r \leq r_0$. Il valore di Q è: $Q = \log_2 C$, e qui la costante C è proprio quella che appare nell 'Osservazione 2.4; Q è detta la dimensione omegenea relativa al sistema $X_1, \ldots, X_m$. La quantità Q sostituisce la dimensione n di Ω come varietà, giocando un ruolo fondamentale in molte disuguaglianze critiche associate ai campi vettoriali.*

Ricordiamo che per ogni aperto limitato $\Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq \Omega_0$ e per ogni funzione $\phi \in C(\partial\Omega)$, il problema di Dirichlet

$$\mathcal{L}u = 0 \text{ in } \Omega; \quad u = \phi \text{ su } \partial\Omega$$

ha una soluzione u_ϕ^Ω nel senso di Perron Wiener (cfr. [CC]). Ogni punto $y \in \partial\Omega$ è regolare per l' operatore $\mathcal{L}$ se per ogni $\phi \in C(\partial\Omega)$, $lim_{x\to y} u_\phi^\Omega(x) = \phi(y)$ per $x \in \Omega$. I risultati che citeremo adesso sono dimostrati in [NS].

Definizione 2.6. *Una funzione $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ è superarmonica per $\mathcal{L}$ se valgono le seguenti proprietà:*

(i) u è inferiormente semicontinua;

(ii) per ogni aperto regolare $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$ si ha:

$$(\mu^V u)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega u \, d\mu_x^V \leq u(x) \text{ per ogni } x \in V$$

denotando con μ_x^V la $\mathcal{L}$- misura armonica relativa a x e V;

(iii) $\mu^V u \in H(V)$, indicando con $H(V)$ l'insieme di tutte le funzioni $\mathcal{L}$-armoniche in V (i.e. $\mathcal{L}\mu^V u = 0$ in V).

Definizione 2.7. *Un aperto $\omega \subseteq \Omega$ è fortemente regolare (per brevità useremo talvolta la sigla SR) se per ogni $y \in \partial\omega$ è possibile definire un vettore normale esterno per ω in y, non caratteristico per $\mathcal{L}$, cioè un vettore $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\nu \neq 0$ tale che la palla euclidea $B(y+\nu, |\nu|)$ non contiene punti di ω e il prodotto scalare $< X_j(y), \nu > \neq 0$ per almeno uno dei campi vettoiali X_j.*

Teorema 2.8. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e ω un aperto SR tale che $\omega \subseteq \overline{\omega} \subseteq \Omega$ e sia $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione superarmonica per $\mathcal{L}$. Allora esiste un' unica misura di Radon positiva μ in ω e un' unica funzione armonica h definita su ω, per cui valgano le due seguenti proprietà:*

$$\mu(\omega) < +\infty$$

e

$$u(x) = \int_\omega G(x,y) d\mu(y) + h(x) \text{ per ogni } x \in \omega$$

La funzione G è la funzione di Green in ω.

Ancora in [NS] è dimostrato il seguente criterio geometrico che stabilisce la regolarità dei punti di frontiera.

Teorema 2.9. (La proprietà della sfera esterna) *Dati un aperto limitato Ω in Ω_0 e un punto $y \in \partial\Omega$, se esiste $x \in \Omega_0 \backslash \Omega$ tale che $B(x, d(x,y)) \subseteq \Omega_0 \backslash \Omega$, allora il punto y è regolare per Ω.*

3 Un teorema di non esistenza

Consideriamo un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^n$, che soddisfi alla proprietà della sfera esterna. Supponiamo che il suo bordo $\partial\Omega$ sia una varietà C^∞ differenziale.

$(n-1)$-dimensionale e che Ω sia localmente da un lato di $\partial\Omega$. Consideriamo l' insieme dei punti caratteristici di $\partial\Omega$ e poniamo

$\Sigma := \{x \in \partial\Omega : \sum_{j=0}^{m} < X_j(x), \nu >^2 = 0\}$, dove ν è la normale esterna a $\partial\Omega$ in x. Definiremo qui di seguito la nozione di soluzione ultra-debole.

Definizione 3.1. *Sia $f(x,u)$ una funzione di Carathéodory in $\Omega \times \mathbb{R}$ (i.e. misurabile in x e continua in u per q.o. x). Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, diciamo che*

(i)

$$\mathcal{L}u = f(x,u) \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

se $f(x,u) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\int_\Omega u\mathcal{L}\varphi = \int_\Omega f(x,u)\varphi$ per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

(ii)

$$\mathcal{L}u \geq f(x,u) \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

se u e f sono come in (i) e $\int_\Omega u\mathcal{L}\varphi \geq \int_\Omega f(x,u)\varphi$ per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi \geq 0$.

(iii) u è soluzione ultra debole di

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(x,u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

se $u \in L^1(\Omega)$, $f(x,u) \in L^1(\Omega)$ e $\int_\Omega u\mathcal{L}\psi = \int_\Omega f(x,u)\psi$ per ogni $\psi \in C^2(\overline{\Omega}\backslash\Sigma) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\mathcal{L}\psi \in L^\infty(\Omega)$ e $\psi = 0$ su $\partial\Omega$.

Il prossimo teorema è il punto chiave di questa nota.

Teorema 3.2. *Fissiamo un punto $\overline{x}$ in Ω. Sia $u \geq 0$ tale che $a(x)g(u) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e*

$$\mathcal{L}u \geq a(x)g(u) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{3.4}$$

dove

(i) $a \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $a \geq 0$ e

$$\int_{B(\overline{x},\eta)} a(y)\frac{d^2(\overline{x},y)}{|B(\overline{x},d(\overline{x},y))|}dy = \infty \quad \text{per ogni } \eta > 0 \text{ piccolo.} \tag{3.5}$$

(ii) $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *è una funzione continua su* $\mathbb{R}$, *non decrescente su* $[0, \infty)$, $g(s) > 0$ *se* $s > 0$, *che verifica*

$$\int^{\infty} \frac{ds}{g(s)} < \infty. \tag{3.6}$$

Allora $u \equiv 0$ *in un intorno di* $\overline{x}$.

Osservazione 3.3. *Nell' introduzione avevamo già osservato che il valore critico* $\frac{n}{2}$, *del caso ellittico, nel nostro caso va sostituito con il valore* $\frac{Q}{2}$, *dove* Q *è la dimensione omogenea associata al sistema di campi* X *(definita nell' Osservazione 2.5). Questo deriva dalla seguente considerazione. Se* $a \in L^p_{\text{loc}}$, *con* $p > \frac{Q}{2}$, *dalla proprietà di doubling segue che*

$$\int_{B(\overline{x},\eta)} a(y) \frac{d^2(\overline{x}, y)}{|B(\overline{x}, d(\overline{x}, y))|} dy \leq c \int_{B(\overline{x},\eta)} a(y) d^{2-Q}(\overline{x}, y) dy;$$

applicando la disuguaglianza di Hölder, con esponenti coniugati p *e* p', *si ha la seguente maggiorazione del termine precedente:*

$$\left(\int_{B(\overline{x},\eta)} a(y)^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(\overline{x},\eta)} d^{p'(2-Q)}(\overline{x}, y) dy \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{3.7}$$

Come mostreremo adesso, $d^{(2-Q)}(\overline{x}, y) \in L^{p'}$ *da cui segue che la quantità in (3.7) è finita.*

Scegliamo dunque un $\lambda > 1$; *per una considerazione di doubling si può scivere*

$$\int_{B(\overline{x},\eta)} d^{p'(2-Q)}(\overline{x}, y) dy = \sum_{k \leq 0} \int_{\lambda^{k-1}\eta < d(\overline{x},y) \leq \lambda^k \eta} d^{p'(2-Q)}(\overline{x}, y) dy \leq$$

$$\leq c \sum_{k \leq 0} \lambda^{k(2-Q)p'} |B(\overline{x}, \lambda^k)| \leq c' \sum_{k \leq 0} \lambda^{k(2-Q)p' + kQ}.$$

Essendo $(2 - Q)p' + Q$ *positivo, l' ultima somma è finita.*

□

Per dimostrare il Teorema 3.2 ci occorrono i seguenti tre Lemmi. I primi due estendono due risultati enunciati in [BCMR] per il caso ellittico. Non ne diamo, in questo luogo una prova rimandando per essa a [Ba]. Osserviamo soltanto che a causa della presenza di punti caratteristici sul bordo dell' aperto, nel caso subellittico, la dimostrazione di tali Lemmi non segue esattamente quella data in [BCMR], essendo diversa la scelta delle funzioni test (si veda anche l' Appendice in [Ba]). Il terzo Lemma è invece dimostrato in [NS].

Lemma 3.4. *Sia $f \in L^1(\Omega)$; esiste un' unica $v \in L^1(\Omega)$ che è soluzione ultra debole di*

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = f & \text{in } \Omega \\ v = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

nel senso che

$$\int_\Omega v\mathcal{L}\psi = \int_\Omega f\psi \tag{3.9}$$

per ogni $\psi \in C^2(\overline{\Omega}\backslash\Sigma) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\mathcal{L}\psi \in L^\infty(\Omega)$ e $\psi = 0$ su $\partial\Omega$.

Proof. Lemma 3.5 in [Ba]. □

Lemma 3.5. (La disuguaglianza di Kato)
Sia $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tale che

$$\mathcal{L}u = f = f(x,u) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{3.10}$$

e sia $\gamma \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione concava con derivata prima non negativa e limitata su $\mathbb{R}$. Allora $\gamma(u) \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e vale:

$$\mathcal{L}\gamma(u) \geq \gamma'(u)f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.11}$$

Proof. Lemma 3.6 in [Ba]. □

Infine:

Lemma 3.6. *Una funzione $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ è superarmonica per l' operatore $\mathcal{L}$ se e solo se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\mathcal{L}u \geq 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Proof. Si veda il Teorema 1 in [NS]. □

Dimostrazione del Teorema 3.2. Osserviamo che la condizione (3.5) è equivalente a

$$\int_{B_\eta(\overline{x})} a(y)\Gamma(\overline{x},y)dy = \infty \text{ per ogni } \eta > 0, \text{ piccolo e tale che } B_\eta(\overline{x}) \subset \Omega, \tag{3.12}$$

in quanto, come è provato in [NSW], [SC], la soluzione fondamentale $\Gamma(\overline{x},y)$ di $\mathcal{L}$ equivale, nei compatti, a

$$\frac{d^2(\overline{x},y)}{|B(\overline{x},d(\overline{x},y))|}.$$

Supponiamo che u soddisfi alle ipotesi del Teorema 3.2, ma che $u \not\equiv 0$. Ne segue che $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$ e $\mathcal{L}u \geq 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$; per il Lemma 3.6, u è superarmonica per $\mathcal{L}$ e quindi è anche inferiormente semicontinua; perciò, se $\overline{x}$ è tale che $u(\overline{x}) > 0$, si ha:

$$u \geq \varepsilon$$

q.o. in un intorno $B_\delta(\overline{x})$ di $\overline{x}$, per qualche $\varepsilon > 0$.
Fissato $\varepsilon > 0$, poniamo

$$\gamma(s) = \int_\varepsilon^s \frac{dt}{g(t)} \quad s \geq \varepsilon,$$

per le ipotesi fatte sulla funzione g ne consegue che

1. $$0 \leq \gamma(s) \leq \int_\varepsilon^\infty \frac{dt}{g(t)} < \infty \quad \text{on } [\varepsilon, +\infty]$$

2. $$\gamma(\varepsilon) = 0 \quad \gamma'(\varepsilon) = \frac{1}{g(\varepsilon)}$$

3. γ è C^1, concava e $0 \leq \gamma'(s) \leq \dfrac{1}{g(\varepsilon)}$ in $[\varepsilon, +\infty)$.

Estendiamo a tutto $\mathbb{R}$ la funzione γ definendola

$$\gamma(s) = \frac{1}{g(\varepsilon)}(s-\varepsilon) \quad \text{per s} \leq \varepsilon;$$

tale funzione soddisfa le ipotesi della γ in (3.11); quindi, ponendo

$$v = \gamma(u) \quad \text{in } B_\delta(\overline{x}),$$

si ha

$$\mathcal{L}v \geq \gamma'(u)a(x)g(u) \geq a(x).$$

Il fatto che $a \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, implica che per $x \in B_\delta(\overline{x})$, la funzione

$$w(x) = \int_{B(\overline{x},\delta)} a(y)\Gamma(x,y)dy$$

sia soluzione in $\mathcal{D}'(B_\delta(\overline{x}))$ di

$$\mathcal{L}w = a(x).$$

Vogliamo puntualizzare il fatto che la funzione convoluzione generalizzata che definisce w, è ben definita e mappa L^1 su L^1 dato che $\Gamma \in L^1(B(\overline{x},\delta))$ (si veda [Ba] per una prova). Allora abbiamo che

$$v - w \in L^1(B_\delta(\overline{x})),$$
$$\mathcal{L}(v - w) \geq 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(B_\delta(\overline{x}))$$

e quindi per il Lemma 3.6 e grazie al Teorema 2.8, ne deduciamo che

$$v - w \geq -c \quad \text{in } \omega \tag{3.13}$$

per una qualche costante $c > 0$, dove ω è un aperto SR e $\omega \subseteq B_\delta(\overline{x})$. Non si perde generalità se assumiamo che (3.13) valga nella palla $B_\eta(\overline{x})$ di (3.5) per un η abbastanza piccolo. Proveremo che

$$\operatorname*{ess\,inf}_{B(\overline{x},\frac{1}{n})} w \longrightarrow +\infty \quad \text{as n} \to +\infty. \tag{3.14}$$

Supponiamo, per il momento, che (3.14) valga. Allora (3.13) assieme a (3.14) sarebbero in contraddizione con

$$v \leq \frac{1}{g(\varepsilon)},$$

e la dimostrazione sarebbe conclusa.

Proviamo dunque la (3.14). Grazie alla Proposizione 2.3, ottenere il risultato per la funzione

$$\tilde{w}(x) = \int_{B(\overline{x},\delta)} a(y) \frac{d^2(x,y)}{|B(x,d(x,y))|} dy$$

è equivalente a ottenerlo per la w. Possiamo quindi utilizzare la funzione $\tilde{w}$. Consideriamo una successione di punti, $\{x_n\}_{n\geq 0}$, tale che

$$d(x_n, \overline{x}) < \frac{1}{n},$$

e

$$\tilde{w}(x_n) < \inf_{B(\overline{x},\frac{1}{n})} \tilde{w} + \frac{1}{n}.$$

Fissato un $\rho \in (0,\delta)$, poichè $a \geq 0$ si ha

$$\int_{B(\overline{x},\delta)} a(y) \frac{d^2(x,y)}{|B(x,d(x,y))|} dy \geq \int_{\rho\leq d(\overline{x},y)\leq\delta} a(y) \frac{d^2(x,y)}{|B(x,d(x,y))|} dy$$

e allora

$$\tilde{w}(x_n) \geq \int_{\rho\leq d(\overline{x},y)\leq\delta} a(y) \frac{d^2(x_n,y)}{|B(x_n,d(x_n,y))|} dy. \tag{3.15}$$

In accordo con l' Osservazione 2.4, possiamo scrivere:

$$\tilde{w}(x_n) \geq c \int_{\rho\leq d(\overline{x},y)\leq\delta} a(y) \frac{d^2(x_n,y)}{|B(y,d(x_n,y))|} dy, \tag{3.16}$$

centrando cioè la palla nel punto y anzichè nel punto x_n. Inoltre usando la disuguaglianza triangolare

$$d(x_n, y) \geq d(y, \overline{x}) - d(x_n, \overline{x}),$$

ne segue che

$$\tilde{w}(x_n) \geq c \int_{\rho\leq d(\overline{x},y)\leq\delta} a(y)(d(y,\overline{x}) - \frac{1}{n}) \frac{d(x_n,y)}{|B(y,d(x_n,y))|} dy.$$

Come è dimostrato in [FW2], la funzione

$$r(s) = \frac{s}{|B(x,s)|}$$

decresce con s; quindi, dato che $d(x_n, y) \leq d(y, \overline{x}) + d(x_n, \overline{x}) \leq d(y, \overline{x}) + \dfrac{1}{n}$, si ha

$$\tilde{w}(x_n) \geq c \int_{\rho \leq d(\overline{x}, y) \leq \delta} a(y)(d(y, \overline{x}) - \frac{1}{n}) \frac{d(y, \overline{x}) + \frac{1}{n}}{|B(y, d(y, \overline{x}) + \frac{1}{n})|} dy.$$

Le due funzioni $\dfrac{d(y, \overline{x}) + 1/n}{|B(y, d(y, \overline{x}) + 1/n)|}$ e $d(y, \overline{x}) - 1/n$ sono decrescenti rispetto a n.

Ciò implica che $(d(y, \overline{x}) - 1/n) \dfrac{d(y, \overline{x}) + 1/n}{|B(y, d(y, \overline{x}) + 1/n)|}$ è crescente e tende a $\dfrac{d^2(\overline{x}, y)}{|B(y, d(\overline{x}, y))|}$. Per il Teorema di Convergenza Monotona il termine destro di (3.16) tende a

$$c \int_{\rho \leq d(\overline{x}, y) \leq \delta} a(y) \frac{d^2(\overline{x}, y)}{|B(\overline{x}, d(\overline{x}, y))|} dy.$$

Allora $\lim\limits_{n \to \infty} \inf\limits_{B(\overline{x}, \frac{1}{n})} \tilde{w} \geq c \displaystyle\int_{\rho \leq d(\overline{x}, y) \leq \delta} a(y) \frac{d^2(\overline{x}, y)}{|B(\overline{x}, d(\overline{x}, y))|} dy$. Il secondo membro della disuguaglianza tende a ∞ se $\rho \to 0$ per l' ipotesi (3.5). In conclusione abbiamo dimostrato quindi che

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{B(\overline{x}, \frac{1}{n})} \tilde{w} \geq \infty$$

o equivalentemente, (3.14). Abbiamo terminato la dimostrazione. □

Una immediata conseguenza del Teorema 3.2 è il seguente risultato di non esistenza.

Corollario 3.7. *Siano $a(x)$ e $g(t)$ come nel Teorema 3.2.*
Siano $a(x)g(u) \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega)$ tale che $f \geq 0$ q.o., $f \not\equiv 0$. Allora non esiste una soluzione (ultra debole) del problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = a(x)g(u) + f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.17}$$

Proof. Supponiamo per assurdo che esista una soluzione ultra debole u del problema (3.17). Poiché il secondo membro dell' equazione è q.o. non negativo, dalla Definizione 3.1 segue che $\int_\Omega u \mathcal{L}\psi \geq 0$ per ogni $\psi \in C^2(\overline{\Omega} \backslash \Sigma) \cap C^0(\overline{\Omega})$,

$\mathcal{L}\psi \in L^\infty(\Omega), \psi \geq 0$ e $\psi = 0$ su $\partial\Omega$. Allora si ha $u \geq 0$ (questo può essere visto procedendo come nella prova del Lemma 3.5 di [Ba]) . Inoltre

$$\mathcal{L}u \geq a(x)g(u) \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.18}$$

Allora, per il Teorema 3.2 e (3.18), inseme al fatto che $u \geq 0$, segue che u è identicamente zero, contraddicendo (3.17) poichè $f \not\equiv 0$. Siamo giunti ad un assurdo nato dall' aver supposto l' esistenza di una soluzione del problema dato. □

4 Esempi

Sia $\overline{x}$ un punto di Ω. Consideriamo come funzione a, soddisfacente alle ipotesi del Teorema 3.2,una potenza della distanza tra $\overline{x}$ e un qualsiasi punto del nostro aperto. Vedremo poi in dettaglio il caso del Laplaciano di Kohn, per il quale si conosce un' espressione analitica della soluzione fondamentale.

4.1 Esempio 1

Osservazione 4.1. *L' integrale (3.5) diverge, quando si ha a che fare con una funzione $a(y)$ della forma*

$$a(y) = d(\overline{x}, y)^\alpha,$$

se e solo se $\alpha \leq -2$.

Proof. Dobbiamo studiare il comportamento di

$$\int_{B(\overline{x},\eta)} d(\overline{x}, y)^\alpha \frac{d^2(\overline{x}, y)}{|B(\overline{x}, d(\overline{x}, y))|} dy,$$

per α numero negativo. Riscriviamola come segue:

$$\sum_{k\leq 0} \int_{\lambda^{k-1}\eta < d(\overline{x},y) \leq \lambda^k \eta} \frac{d^{\alpha+2}(\overline{x}, y)}{|B(\overline{x}, d(\overline{x}, y))|} dy; \tag{4.19}$$

il numero $\lambda > 1$ verrà scelto opportunamente in seguito. Per una proprietà delle metriche doubling, il termine precedente si domina con

$$c\sum_{k\leq 0}\lambda^{k(\alpha+2)}\frac{1}{|B(\overline{x},\lambda^{k-1})|}|B(\overline{x},\lambda^k)| \leq$$
$$\leq c'\sum_{k\leq 0}\lambda^{k(\alpha+2)}$$

che è convergente se $\alpha > -2$ (l'ultima disuguaglianza usa ancora una proprietà di doubling di d). D' altronde la (4.19) è maggiore o uguale a

$$c\sum_{k\leq 0}\lambda^{k(\alpha+2)}\frac{1}{|B(\overline{x},\lambda^k)|}\left(|B(\overline{x},\lambda^k)| - |B(\overline{x},\lambda^{k-1})|\right). \tag{4.20}$$

Grazie al Teorema 1 di [FW2], esiste una costante $\theta(1) > 0$ tale che

$$\frac{1}{|B(\overline{x},\lambda^k)|}\left(|B(\overline{x},\lambda^k)| - |B(\overline{x},\lambda^{k-1})|\right) \geq 1 - \frac{1}{\theta(1)}\frac{1}{\lambda},$$

quindi, scegliendo $\lambda = \dfrac{2}{\theta(1)}$, si osserva che (4.20) è

$$\geq c''\sum_{k\leq 0}\lambda^{k(\alpha+2)};$$

quest' ultimo termine diverge quando $\alpha \leq -2$. □

4.2 Esempio 2: il caso del laplaciano di Kohn

Cominciamo col definire il gruoppo di Heisenberg n-dimensionale $\mathbb{H}_n = (\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}, \circ)$; '$\circ$' denota la regola di composizione nel gruppo data da

$$(z,t)\circ(z',t') := (z+z', t+t'+2Im < z,z' >)$$

dove $z = x+iy \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}$ e $< z,z' >= \sum_{j=1}^n z_j\overline{z}'_j$.
È noto che i $2n$ campi vettoriali, invarianti a sinistra,

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + 2y_j\frac{\partial}{\partial t};\quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - 2x_j\frac{\partial}{\partial t};$$
$$j = 1,\ldots,n$$

soddisfano alla condizione di rango massimo di Hörmander.

La norma naturale di $\mathbb{H}_n$ è

$$|(z,t)| = (|z|^4 + t^2)^{\frac{1}{4}} \approx \max\{|z|, \sqrt{|t|}\}.$$

È data la seguente distanza invariante a sinistra:

$$d(g,g') = |g^{-1} \circ g'|$$

$(g, g' \in \mathbb{H}_n)$. Essa è equivalente alla distanza di Carnot-Carathéodory in $\mathbb{H}_n$. Perciò $|B((z,t),r)| \approx r^Q$, dove $Q = 2n+2$ è la dimensione omogenea. In $\mathbb{H}_n$ si definisce l'operatore, detto laplaciano di Kohn,

$$\Delta_{\mathbb{H}_n} = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + Y_j^2.$$

L' operatore $\mathcal{L}$ definito in (1.1) è quindi $-\Delta_{\mathbb{H}_n}$.

Si ha un' espressione esplicita della soluzione fondamentale di $\Delta_{\mathbb{H}_n}$:

$$\Gamma(x,y) := \frac{c_Q}{|x^{-1} \circ y|^{Q-2}},$$

con $x, y \in \mathbb{H}_n$ e c_Q costante opportuna.

In questo caso particolare, l' ipotesi fatta sulla funzione $a(x)$ nel Teorema 3.2, ponendo $\overline{x} = 0$, diviene:

$$\int_{B_\eta(0)} a(z,t) \frac{1}{(|z|^4 + t^2)^{\frac{n}{2}}} dz\, dt = \infty. \tag{4.21}$$

Vogliamo studiare questo integrale quando la funzione $a(z,t)$ è una potenza della norma euclidea in $\mathbb{R}^{2n+1}$, i.e.:

$$a(z,t) = (|z|^2 + |t|^2)^{\frac{\alpha}{2}},$$

per α numero negativo. Vediamo che (4.21) diverge se e solo se $\alpha \leq -2$. La (4.21) si può scrivere:

$$\int_{B_\eta(0)} (|z|^2 + |t|^2)^{\frac{\alpha}{2}} (|z|^4 + |t|^2)^{\frac{-n}{2}} dz\, dt. \tag{4.22}$$

Usando le coordinate cilindriche, l' integrale (4.22) si minora con

$$\int_{0\le t\le\rho^2\le\eta^2} (\rho^2+|t|^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\rho^4+|t|^2)^{\frac{-n}{2}}\rho^{2n-1}d\rho\, dt$$

Questo integrale è uguale a

$$\int_0^\eta d\rho \int_0^{\rho^2} (\rho^2+|t|^2)^{\frac{\alpha}{2}}(\rho^4+|t|^2)^{\frac{-n}{2}}\rho^{2n-1}dt \ge$$
$$\int_0^\eta d\rho \int_0^{\rho^2} (\rho^2+\rho^4)^{\frac{\alpha}{2}}(\rho^4+\rho^4)^{\frac{-n}{2}}\rho^{2n-1}dt$$

L' ultimo termine si comporta come

$$\int_0^\eta \rho^{-2n}\rho^\alpha(\rho^2+1)^{\frac{\alpha}{2}}\rho^{2n-1}\rho^2 d\rho \approx$$
$$\int_0^\eta \rho^{\alpha+1}.$$

Perciò diverge per $\alpha \le -2$. Vediamo adesso cosa succede se $\alpha > -2$. Usiamo di nuovo le coordinate cilindriche. Poichè siamo interessati ad un comportamento vicino all' origine possiamo procedere cosi': integriamo in (4.22)nella variabile t; con un ulteriore cambiamento di variabile $t = \rho\tau$, dobbiamo stimare

$$\int_0^\eta \rho^{n+\alpha}d\rho \int_0^{\eta^2/\rho} (\rho^2+\tau^2)^{\frac{-n}{2}}(1+\tau^2)^{\frac{\alpha}{2}}\, d\tau.$$

Poichè $\eta/\rho \to \infty$ per $\rho \to 0$, possiamo spezzare l' integrale

$$\int_0^{\eta^2/\rho} (\rho^2+\tau^2)^{\frac{-n}{2}}(1+\tau^2)^{\frac{\alpha}{2}}\, d\tau \tag{4.23}$$

nella somma

$$\int_0^1 (\rho^2+\tau^2)^{\frac{-n}{2}}(1+\tau^2)^{\frac{\alpha}{2}}\, dt + \int_1^{\eta^2/\rho} (\rho^2+\tau^2)^{\frac{-n}{2}}(1+\tau^2)^{\frac{\alpha}{2}}\, d\tau$$

e maggiorare con

$$\int_0^1 (\rho^2+\tau^2)^{\frac{-n}{2}}\, dt + \int_1^{\eta^2/\rho} \tau^{\alpha-n}\, d\tau.$$

Operando ancora un cambiamento di variabili, simile al precedente, nel primo termine della somma e utilizzando altre facili maggiorazioni, alla fine ci troviamo a dover studiare un integrale in $d\rho$ per la funzione $\rho^{n+\alpha}$. Avendo $-2 < \alpha$ e $n \ge 3$, l'integrale è convergente.

Riferimenti bibliografici

[Ba] A. Baldi: *A non existence problem for degenerate elliptic PFE's*, preprint.

[B] J.M. Bony: *Principe de maximum, inegalité de Harnack et unicité du problem de Cauchy pour les operateurs elliptiques dégénerés*, Ann.Ist.Fourier (Grenoble) **19** (1969), 277-304.

[BC] H. Brezis, X. Cabré: *Some simple nonlinear PDE' s without solutions*, Boll. U.M.I. **serie VIII**, vol. I-B, No 2 (1998), 223-262.

[BCMR] H. Brezis, T. Cazenave, Y. Martel, A. Ramiandrisoa: *Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited*, Ad. Diff. Eq. **1** (1996), 73-90.

[CC] C. Costantinescu, A. Cornea: *Potential theory on Harmonic spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[D] M. Derridj: *Un probème aux limites pour une classe d'opérateurs du seconde ordre hypoelliptiques*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **21**, 4 (1971), 99-148.

[FP] C. Fefferman, D.H. Phong: *Subelliptic eigenvalue problems*, in : Conference on Harmonic Analysis, Chicago 1980, W. Beckner et al. ed. Wadsworth (1981), 590-606.

[FSC] C. Fefferman, A. Sanchez Calle: *Fundamental solution for second order subelliptic operators*, Ann. of Math. **124** (1986), 247-272.

[FGW] B. Franchi, C. Gutierrez, R.L. Wheeden: *Weighted Sobolev-Poincaré inequalities for Grushin type operators*, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994), 523-604.

[FW1] B. Franchi , R.L. Wheeden: *Compensation couples and isoperimetric estimates for vector fields*, Colloq. Math. **74**, 1 (1997), 9-27.

[FW2] B. Franchi, R.L. Wheeden: *Some remarks about Poincaré type inequalities and representation formulas in metric spaces of homogeneous type*, to appear on J. Inequalities and Appl.

[GN] N. Garofalo, D.M. Nhieu: *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math., **49** (1996), 1081-1144.

[H] L. Hörmander: *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147-171.

[K] T. Kato: *Schrödinger operators with singular potentials*, Israel J. Math. **13** (1972), 135-148.

[KN] J.J. Kohn, L. Nirenberg: *Non-coercive boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 443-492.

[LM] J.L. Lions, E. Magenes: *Non-homogeneous boundary value problems and applications I*, Die Grundlehren der Matematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen 181, (1972) Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

[L] G. Lu: *The sharp Poincaré inequality for free vector fields: an endpoint result*, Revista Mat. Iberoamericana **10** (1994), 453-466.

[NS] P. Negrini, V. Scornazzani: *Superharmonic functions and regularity of boundary points for a class of elliptic-parabolic partial differential operators*, Boll. U.M.I. **C3**, No 1 (1984), 85-107.

[NSW] A. Nagel, E. M. Stein, Wainger S.: *Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties*, Acta Math. **155** (1985), 103-147.

[RS] L. Rotschild, E. M. Stein: *Hypoelliptic differential operators and nilpotents groups*, Acta Math. **137** (1976), 247-320.

[SC] A. Sanchez Calle: *Fundamental solutions and geometry of sum of squares of vector fields*, Invent. Math. **78** (1984), 143-160.